Sur les familles de surfaces et de courbes.

I. Conditions de régularité pour les familles de surfaces.

Par M. B. de Kerékjártó (Princeton University).

Soit S_1 une surface fermée simplement connexe dans l'espace à trois dimensions et soit $\{S\}$ une famille de surfaces simplement connexes intérieures à S_1 telles que par chaque point intérieur à S_1, sauf certains points isolés, passe une surface de la famille et une seule. Alors (comme je le démontrerai en un autre mémoire de cette série): 1. il n'y a qu'un seul point exceptionnel; 2. ce point est intérieur à chaque surface de la famille; 3. de deux surfaces de la famille l'une contient toujours l'autre; 4. on peut faire correspondre aux surfaces de la famille les valeurs t $(0<t\leqq 1)$ de telle façon que pour $t<t'$, S_t est intérieur à $S_{t'}$; 5. cette correspondance biunivoque entre les surfaces S_t et les valeurs t est continue dans le sens qu'à chaque nombre positif ε correspond une valeur $\delta>0$ telle que pour $|t-t'|<\delta$, chaque point de la surface S_t respectivement $S_{t'}$ est à une distance inférieure à ε de la surface $S_{t'}$ respectivement S_t

Nous allons considérer sous quelles conditions la famille $\{S_t\}$ est équivalente à la famille des sphères concentriques. En d'autres termes, sous quelles conditions peut-on transformer la surface S_t et son intérieur en une sphère et son intérieur par une transformation topologique (c'est-à-dire biunivoque et continue) qui transforme chaque surface S_t en une sphère concentrique.

Nous nous servirons de la notion de l'*écart* de deux surfaces introduit par M. Fréchet qui peut être définie comme il suit: deux surfaces ont un écart inferieur à ε $(\geqq 0)$ lorsqu'il est possible d'établir une correspondace biunivoque et continue entre les deux surfaces telle que deux points correspondants on toujours une distance $<\varepsilon$. (La borne inférieure des valeurs ε statisfaisant à l'énoncé est appelé l'écart des deux surfaces).

Nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Pour l'équivalence de la famille* $\{S_t\}$ *avec une famille de sphères concentriques la condition suivante est nécéssaire et suffisante: à chaque valeur* $\varepsilon>0$ *correspond une valeur* $\delta>0$ *telle que pour* $|t-t'|<\delta$ *l'écart des surfaces* S_t *et* $S_{t'}$ *est inférieure à* ε.

Il est évident que la condition est nécéssaire. Pour démontrer qu'elle est suffisante, nous démontrons d'abord le lemme suivant:

Lemme. Soient S^0 *et* S^* *deux surfaces de la famille* $\{S_t\}$ *(dont nous supposons qu'elle satisfait aux prémisses du théorème); soit* T *une transformation topologique avec indicatrice invariable de* S^0 *en* S^* *et soit* ε *un nombre positif. Alors on peut déterminer une suite de surfaces de la famille*

$$S^0, S^1, S^2, \ldots, S^n = S^* \quad (S^{i-1} \text{ intérieur à } S^i)$$

et des transformations topologiques avec indicatrice invariable

$$T_1, T_2, \ldots, T_n$$

telles que T_i *transforme* S^{i-1} *en* S^i *et chaque point de* S^{i-1} *est de son image à une distance inférieure à* ε*; enfin que*

$$T = T_1 T_2 \ldots T_n.$$

D'après nos conditions, il y a une suite de surfaces

$$S^0, S^1, S^2, \ldots, S^r, S^*$$

telle que S^i est intérieur à S^{i+1}, que l'écart de S^i et S^{i+1} est inférieur à ε enfin que l'écart de deux surfaces entre S^r et S^* est toujours inférieur à $\frac{\varepsilon}{3}$. Or désignons par T_i une transformation topologique avec indicatrice invariable de S^{i-1} en S^i ($i = 1, 2, \ldots, r-1$) par laquelle chaque point de S^{i-1} est à une distance inférieure à ε de son image. Soit T^* une transformation avec indicatrice invariable de S^r en S^* qui transforme chaque point de S^r en un point à une distance inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$.

Considérons la transformation

$$\tau = T^{-1} T_1 T_2 \ldots T_r T^*.$$

C'est une transformation topologique de S^* en soi même avec indicatrice invariable. D'après le *théorème de déformation* dû à M. TIETZE [1]), on peut la déformer topologiquement à l'identité. En particulier, on peut trouver une suite de transformations topologiques de S^* en soi même

$$1 = \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s = \tau^{-1}$$

telles que pour chaque transformation $\tau_{i-1}^{-1}\tau_i$ l'image de n'importe quel point est à une distance $< \frac{\varepsilon}{3}$ du point même.

Soit alors $S^{r+1}, S^{r+2}, \ldots, S^{r+s-1}$ une suite de surfaces de la famille entre S^r et S^* (S^i intérieur à S^{i+1}) et $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{s-1}$ des transformations topologiques à indicatrice invariable de S^* en $S^{r+1}, S^{r+2}, \ldots, S^{r+s-1}$ telles que chaque point est éloigne de son image par moins que $\frac{\varepsilon}{3}$.

Considérons les transformations

$$\begin{aligned} T_{r+1} &= T^* \tau_1 \varrho_1 \\ T_{r+2} &= \varrho_1^{-1} \tau_1^{-1} \tau_2 \varrho_2 \\ T_{r+3} &= \varrho_2^{-1} \tau_2^{-1} \tau_3 \varrho_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_{r+s} &= \varrho_{s-1}^{-1} \tau_{s-1}^{-1} \tau_s. \end{aligned}$$

La transformation T_{r+i} transforme la surface S^{r+i-1} en S^{r+i} de telle façon que chaque point est à une distance de son image $< \varepsilon$. Le produit des transformations $T_{r+1}, \ldots, T_{r+s}$ est (puisque $\tau_s = \tau^{-1}$)

$$T_{r+1}\, T_{r+2} \ldots T_{r+s} = T^* \tau^{-1};$$

combinant cette relation avec la relation ci-dessus

$$T^{-1}\, T_1\, T_2 \ldots T_r = \tau\, T^{*-1},$$

on obtient

$$T_1\, T_2 \ldots T_{r+s} = T$$

ce qui démontre notre lemme,

La démonstration du téorème est à présent immédiate. Nous prenons un nombre ε (> 0) et nous choisissons une suite de surfaces de la famille, chacune contenue dans la précédente de telle sorte que deux surfaces consécutives ont un écart $< \varepsilon$; nous supposons que la première surface de la suite est la surface extérieure S_1 de la famille et que la dernière est à une distance

[1]) Voir par exemple: KERÉKJÁRTÓ, Vorlesungen über Topologie I. (Berlin, 1923), p. 189.

$<\varepsilon$ du centre. Nous déterminons une transformation topologique à indicatrice invariable de chaque surface de la suite en la surface suivante de telle facon que point et image soient à une distance $<\varepsilon$. Après cela, nous prenons entre deux surfaces consécutives S et S' de la première suite une deuxième suite de surfaces dont deux consécutives ont un écart $<\frac{\varepsilon}{2}$ et nous déterminons une transformation de deux surfaces consécutives telle que point et image soient à une distance $<\frac{\varepsilon}{2}$ et que le produit de toutes ces transformations soit le même que la transformation de S en S' déterminée à propos de la première suite. En continuant ainsi, nous obtenons un ensemble T_t de transformations de la surface extérieure S_1 sur les surfaces S_t $(1>t>0)$ qui dépendent continuement de t. L'image d'un point de S_1 par toutes les transformations T_t est un arc simple joignant ce point de S_1 au centre en coupant chaque surface S_t en un seul point.

Alors nous transformons la surface S_1 en une sphère

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Soit P un point arbitraire intérieur à S_1, soit S_t la surface à laquelle P appartient et P_1 le point de S_1 qui est transformé en P par la transformation T_t. Alors nous transformons le point P en le point aux coordonnées

$$\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$$

ou x, y, z sont les coordonnées du point de la sphère correspondant à P_1.

Ainsi, nous avons obtenu une transformation topologique de la surface S_1 et de son intérieur en la région $x^2+y^2+z^2\leq 1$ par laquelle les surfaces S_t de la famille sont transformées en les sphères concentriques $x^2+y^2+z^2=t^2$.

Il y a lieu de remarquer que la condition pour le théorème ci-dessus est équivalente à la suivante:

Étant donné un point P, il y a un voisinage V_P de P tel que si les régions $r_1, r_2, \ldots$ sur les surfaces de la famille situées entièrement dans V_P ont pour frontière chacune une courbe c_i simple et fermée, ces courbes convergeant vers un seul point Q de V_P, les régions $r_1, r_2, \ldots$ convergent aussi vers le même point Q.

Sous cette forme, la condition s'applique aussi aux familles de surfaces ouvertes et y donne *la condition nécéssaire et suffisante pour que la famille soit équivalente au voisinage d'un point P à une famille de plans parallels.*

L'extension de ces résultats à plus de trois dimensions ne dépend que de l'extension du théorème de Tietze aux sphères à n dimensions.